

Indécomposabilité de la loi de Poisson

Rappel : $Z \sim P(\lambda)$ si Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Z=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ avec $\lambda > 0$.
 $X \sim P(\lambda), Y \sim P(\mu)$ avec $X \perp Y \Rightarrow Z := X+Y \sim P(\lambda+\mu)$. Quid de la réciproque?

Proposition : $X \perp Y$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ tq $Z := X+Y \sim P(\lambda)$. Alors X et Y suivent une loi de poisson.

Preuve : Le bon outil pour caractériser des va entières et la série génératrice : Soit T une va dans $\mathbb{N}$, $\forall n, \pi_n := P(T=n)$. Alors $\sum \pi_n = 1$ donc la série entière $\sum_{n \geq 0} \pi_n z^n$ a un rayon de convergence ≥ 1 . On peut alors définir $E(z^T) = \sum_{n \geq 0} \pi_n z^n$ pour $|z| \leq 1$.
 On a $E(z^{T_1}) = E(z^{T_2}) \Leftrightarrow P_{T_1} = P_{T_2}$. (car $\forall n, \pi_n = \frac{E(z^n)}{n!}$)

Notons $\forall n, p_n = P(X=n), q_n = P(Y=n)$, et $f(z) := E(z^X) = \sum_{n \geq 0} p_n z^n$, $g(z) := E(z^Y) = \sum_{n \geq 0} q_n z^n$.
 On a $E(z^Z) = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n = e^{\lambda(z-1)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

$X \perp Y$ donc $X^X \perp Y^Y$ donc $E(z^X z^Y) = E(z^X) E(z^Y)$, donc $f(z)g(z) = E(z^Z) = e^{\lambda(z-1)} \quad \forall z \in \mathbb{D}$.

Développons cette égalité :
 $\forall |z| \leq 1 : \sum_{n \geq 0} p_n z^n \times \sum_{m \geq 0} q_m z^m = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n \quad (*)$

En évaluant en 0 on trouve $p_0 q_0 = e^{-\lambda} \neq 0$ donc $p_0 \neq 0$ et $q_0 \neq 0$.
 Et en regardant terme à terme dans le produit de Cauchy, pour $n \geq 1$,

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + \dots + p_n q_0 \geq p_n q_0 \quad (\text{resp. } p_0 q_n)$$

Donc $p_n \leq e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{q_0 n!}$ et la série définissant f a donc un rayon de convergence infini (idem pour g).
 Principe du prolongement analytique $\rightarrow (*)$ vraie sur $\mathbb{C}$: $\forall z \in \mathbb{C}, f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)}$ pour $\lambda > 0$.

Portons de là pour obtenir des expressions de f et g . à l'anneau

On sait donc que f et g ne s'annulent pas, donc elles s'écrivent $f = e^F$ et $g = e^G$ avec F, G holomorphes. Reste donc à montrer qu'on a en fait $f(z) = e^{a(z-1)}$, $g(z) = e^{b(z-1)}$ pour $a, b > 0$. Raisonnons sur f .

$$\text{Si } |z| = r \geq 1, |f(z)| \leq f(r) \text{ avec } q_0 f(r) \leq g(r) f(r) = e^{\lambda(r-1)}$$

donc $|f(z)| \leq C e^{\lambda|z|}$ avec C une constante positive. On peut alors écrire $e^{-\lambda z}$ dans le produit

On a donc $\|f(z)\| \leq Ce^{\lambda|z|}$, donc $\operatorname{Re}(Fz) \leq \ln C + \lambda|z|$

L'astuce est d'écrire $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et de voir cela comme une série de Fourier dont tous les coeffs négatifs sont nuls, ce qui donne

$$\forall n \geq 0, \begin{cases} a_n z^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{it}) e^{-inr} dr & \textcircled{1} \\ 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{it}) e^{inr} dr & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: a_n z^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(F(re^{it})) e^{-inr} dr \quad \text{donc } |a_n| |z^n| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{it})| dr$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln C + \lambda r dr$$

$$\leq 2 \ln C + 2\lambda r$$

Donc si $n \geq 1$: $|a_n| \leq 2 \left(\frac{\ln C}{r^n} + \lambda \frac{r^{n-1}}{r^n} \right) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$

Car $f(z) = \sum p_n = 1$ au point $z=1$
 $g(z) = \sum q_n = 1$

donc $a_n = 0 \quad \forall n \geq 1$, donc $F(z) = az + \alpha$

Or comme $f(z)g(z) = e^{a(z-1)} e^{b(z-1)}$, on a $f(z) = g(z) = 1$, donc $F(z) = a + \alpha$

donc $a = -\alpha$ et $f(z) = e^{a(z-1)}$

De même, $g(z) = e^{b(z-1)}$

reste à vérifier que $a, b \geq 0$. On a: $a = f'(1) = \sum_{n \geq 0} n p_n = E(X) \geq 0$, idem pour b .

Donc $X \sim \mathcal{P}(a)$ et $Y \sim \mathcal{P}(b)$. Yesssi!

Bonus: Comment montrer la prop: $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplement connexe, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ hol. tq $\forall z \in \Omega, f(z) \neq 0$
 Alors $\exists$ hol. tq $f = e^F$.

$\rightarrow f'/f$ hol. sur Ω simplement connexe donc $\exists$ primitive F hol. tq $F' = f'/f$

On veut trouver un "log"

$\rightarrow g = e^{-F} f$ est hol. $\rightarrow g' = -F' e^{-F} f + e^{-F} f' = -\frac{f'}{f} e^{-F} f + e^{-F} f' = 0$

Donc $g = c \neq 0$, donc $f = ce^F$

Pour $b \in \mathbb{C}$ tq $e^b = c$, on a donc $f = e^{b+F}$